Matematika 2 – java e dymbëdhjetë

Seminaret

1. Të gjendet thyesa e barabartë me thyesën $\frac{5}{7}$ që e ka shumën e numëruesit dhe emëruesit të barabartë me 48.

2. Vërtetoni që për çdo $n \in \mathbb{N}$, numrat:

(a) $\frac{n-4}{21}$ dhe $\frac{n-3}{12}$;

(b) $\frac{n-6}{15}$ dhe $\frac{n-5}{24}$

nuk mund të jenë njëkohësisht numra të plotë.

3. Vërtetoni që për çdo numër natyror $n \in \mathbb{N}$, thyesat:

(a) $\frac{n}{2n+1}$;

(b) $\frac{14n+3}{21n+4}$;

(c) $\frac{2n^2-1}{2n+1}$

janë të pathjeshtueshme.

4. Le të jetë thyesa $\frac{a}{b}$ e pathjeshtueshme, ku $a, b \in \mathbb{N}$. Vërtetoni që thyesat:

(a) $\frac{a+b}{b}$ dhe $\frac{a-b}{b}$;

(b) $\frac{a+b}{ab}$ dhe $\frac{a-b}{ab}$

janë të pathjeshtueshme.

5. Le të jetë thyesa $\frac{a}{b}$ e pathjeshtueshme, ku $a, b \in \mathbb{N}$. Të gjenden të gjithë numrat e plotë x dhe y për të cilët thyesa $\frac{a+x}{b+x}$ është e barabartë me thyesën $\frac{a}{b}$.

6. Le të jenë numra të plotë të ndryshëm nga zero të tillë që $b \neq c$. Vërtetoni që vlen:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

7. Është dhënë thyesa $\frac{a}{b}$, ku $a < b$, dhe le të jetë $b = aq + r$, ku $r < |a|$. Vërtetoni që vlen:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q+1} + \frac{a-r}{b(q+1)}$$

Zgjidhjet

1. Nga kushtet e dhëna kemi $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ dhe $a + b = 48$. Nga këtu rrjedh që:

$$7a = 5b \text{ dhe } 7a + 7b = 336.$$

Duke zëvëndësuar do kemi $12b = 5b + 7b = 336 \Rightarrow b = 28 \Rightarrow 7a = 5 \cdot 28 \Rightarrow a = 5 \cdot 4 = 20$.

$$\text{Pra, } \frac{20}{28} = \frac{5}{7} \text{ dhe } 20 + 28 = 48$$

2. Do të supozojmë të kundërtën për të gjitha rastet:

(a) $\frac{n-4}{21} = k \in \mathbb{Z}$ dhe $\frac{n-3}{12} = l \in \mathbb{Z}$. Rrjedh që $n = 21k + 4$ dhe $n = 12l + 3$. Nga këtu kemi ekzistencën e numrave të plotë k dhe l për të cilët vlen:

$$21k + 4 = 12l + 3 \Leftrightarrow 12l - 21k = 1 \Leftrightarrow 3(4l - 7k) = 1 \Leftrightarrow 4l - 7k = \frac{1}{3}$$

Pra, kemi barazimin mes numrit të plotë $4l - 7k$ dhe numrit jo të plotë $\frac{1}{3}$. Kontradita e arritur implikon që supozimi i bërë është i gabuar.

(b) $\frac{n-6}{15} = k \in \mathbb{Z}$ dhe $\frac{n-5}{24} = l \in \mathbb{Z}$. Rrjedh që $n = 15k + 6$ dhe $n = 24l + 5$. Nga këtu kemi ekzistencën e numrave të plotë k dhe l për të cilët vlen:

$$15k + 6 = 24l + 5 \Leftrightarrow 24l - 15k = 1 \Leftrightarrow 3(8l - 5k) = 1 \Leftrightarrow 8l - 5k = \frac{1}{3}$$

Pra, kemi barazimin mes numrit të plotë $8l - 5k$ dhe numrit jo të plotë $\frac{1}{3}$. Kontradita e arritur implikon që supozimi i bërë është i gabuar.

3. Që një thyesë të jetë e pathjeshtueshme duhet të tregojmë që faktori i vetëm i plotë pozitiv i përbashkët i numëruesit dhe emëruesit, është numri 1.

(a) Le të jetë d një pjestues i plotë pozitiv i numëruesit dhe emëruesit të thyesës $\frac{n}{2n+1}$. Pra, kemi $n = kd$ dhe $2n + 1 = ld$, ku $k, l \in \mathbb{N}$. Numri d do jetë pjestues edhe i numrit 1 sepse $1 = 2n + 1 - 2n = ld - 2kd = (l - 2k)d$. Kështu $d = 1$, që do të thotë se thyesa $\frac{n}{2n+1}$ është e pathjeshtueshme.

(b) Le të jetë d një pjestues i plotë pozitiv i numëruesit dhe emëruesit të thyesës $\frac{14n+3}{21n+4}$. Pra, kemi $14n + 3 = kd$ dhe $21n + 4 = ld$, ku $k, l \in \mathbb{N}$. Numri d do jetë pjestues edhe i numrit 1 sepse $1 = 3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 3kd - 2ld = (3k - 2l)d$. Kështu $d = 1$, që do të thotë se thyesa $\frac{n}{2n+1}$ është e pathjeshtueshme.

(c) Le të jetë d një pjestues i plotë pozitiv i numëruesit dhe emëruesit të thyesës $\frac{2n^2-1}{2n+1}$. Pra, kemi $2n^2 - 1 = kd$ dhe $2n + 1 = ld$, ku $k, l \in \mathbb{N}$. Numri d do jetë pjestues edhe i numrit $n+1$, sepse $n+1 = n(2n+1) - (2n^2-1) = nld - kd = (nl - k)d$. Nga këtu rrjedh që numri d është pjestues edhe i numrit 1 sepse $1 = 2(n+1) - (2n+1) = 2(nl-k)d - ld = (2nl - 2k - l)d$. Kështu, del që $d = 1$, që do të thotë se thyesa $\frac{2n^2-1}{2n+1}$ është e pathjeshtueshme.

4. Meqënëse thyesa $\frac{a}{b}$ është e pathjeshtueshme, kemi që pjestuesi i vetëm i plotë pozitiv i numrave a dhe b është numri 1.

(a) ***Për thyesën*** $\frac{a+b}{b}$.
Le të jetë d një pjestues i plotë pozitiv i numrave $a+b$ dhe b. Rrjedh që numri d plotpjeston edhe diferencën $a=(a+b)-b$. Pra, numri d plotpjeston numrat a dhe b. Rrjedh që $d=1$, që do të thotë se thyesa $\frac{a+b}{b}$ nuk është e thjeshtueshme.

Për thyesën $\frac{a-b}{b}$.
Le të jetë d një pjestues i plotë pozitiv i numrave $a-b$ dhe b. Rrjedh që numri d plotpjeston edhe shumën $a=(a-b)+b$. Pra, numri d plotpjeston numrat a dhe b. Rrjedh që $d=1$, që do të thotë se thyesa $\frac{a-b}{b}$ nuk është e thjeshtueshme.

(b) ***Për thyesën*** $\frac{a+b}{ab}$.
Le të jetë d një pjestues i plotë pozitiv i numrave $a+b$ dhe ab. Rrjedh që numri d plotpjeston edhe numrin $a^2=(a+b)a-ab$ edhe numrin $b^2=(a+b)b-ab$. Pra, numri d plotpjeston numrat a^2 dhe b^2 dhe nga këtu meqënëse numrat a dhe b janë reciprokisht të thjeshtë atëherë edhe numrat a^2 dhe b^2 janë reciprokisht të thjeshtë dhe kjo implikon që $d=1$. Pra, thyesa $\frac{a+b}{ab}$ nuk është e thjeshtueshme.

Për thyesën $\frac{a-b}{ab}$.
Le të jetë d një pjestues i plotë pozitiv i numrave $a-b$ dhe ab. Rrjedh që numri d plotpjeston edhe numrin $a^2=(a-b)a+ab$ edhe numrin $b^2=ab-(a-b)b$. Pra, numri d plotpjeston numrat a^2 dhe b^2 dhe nga këtu meqënëse numrat a dhe b janë reciprokisht të thjeshtë atëherë edhe numrat a^2 dhe b^2 janë reciprokisht të thjeshtë dhe kjo implikon që $d=1$. Pra, thyesa $\frac{a-b}{ab}$ nuk është e thjeshtueshme.

5. Nga kushti i detyrës kemi që $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$. Gjithashtu numrat a dhe b janë reciprokisht të thjeshtë meqënëse thyesa $\frac{a}{b}$ është e pathjeshtueshme.

Rrjedh që: $b(a+x)=a(b+y)\Rightarrow ba+bx=ab+ay\Rightarrow bx=ay$.

$bx|a\Rightarrow x|a$ sepse $PMP(a,b)=1$. Nga këtu rrjedh që $x=ka$, ku $k\in\mathbb{Z}$.

$ay|b\Rightarrow y|b$ sepse $PMP(a,b)=1$. Nga këtu rrjedh që $y=lb$, ku $l\in\mathbb{Z}$.

Nga këtu rrjedh që: $bx=ay\Leftrightarrow b(ka)=a(lb)\Leftrightarrow k=l$. Përfundimisht $x=ka$ dhe $y=kb$, ku k është numër i çfarëdoshëm në $\mathbb{Z}$.

6.

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b-c}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$$

7. Nga relacioni $b=aq+r$ rrjedh që $b=a(q+1)+r-a$ dhe nga këtu, $b+a-r=a(q+1)$.

$$\frac{1}{q+1}+\frac{a-r}{b(q+1)}=\frac{1}{q+1}\left(1+\frac{a-r}{b}\right)=\frac{1}{q+1}\left(\frac{b+a-r}{b}\right)=\frac{1}{q+1}\left(\frac{q+1}{b}\right)=\frac{1}{b}.$$